Fourier Serileri

Fransız matematikçi Jean-Baptiste Joseph Fourier, bir uzun ince yalıtılmış çubukta sıcaklık koşulu problemini incelerken bir $f(x)$ fonksiyonunu bir trigonometrik seriolarak ifade etmek ihtiyacı duydu. Genellikle, $f(x)$, $-L<x<L$ aralığında tanımlı ise

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (*)$$

serisi için a_0, a_n ve b_n $(n\geq 1)$ katsayılarını bilmemiz gerekir.

$(*)$ denklemine $(-L,L)$ aralığında f'nin bir <u>Fourier serisi</u> denir. $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ katsayılarını bulmak için, aşağıdaki belirli integral tablosu işimizi kolaylaştıracaktır.

m ve n pozitif tamsayılar ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

1) $\displaystyle\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx=0$ 2) $\displaystyle\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx=0$

3) $\displaystyle\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ L, & m=n\end{cases}$ 4) $\displaystyle\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx=0$

5) $\displaystyle\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ L, & m=n.\end{cases}$

Katsayıların Hesabı

a_0'ın hesabı: $(*)$ denkleminin her iki tarafının, $-L$'den L'ye integralini alırsak

$$\int_{-L}^{L}f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}dx+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx=L\,a_0.$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\,dx.$$

a_m'nin hesabı: $(*)$ denkleminin her iki tarafını $\cos\frac{m\pi x}{L}$ $(m>0)$ ile çarpar ve $-L$'den L'ye integral alırsak

$$\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx.$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx = a_m\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx = L\,a_m.$$

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx.$$

b_m'nin hesabı: (*) denkleminin her iki tarafını $\sin\frac{m\pi x}{L}$ ile çarpar $-L$'den L'ye integral alırsak

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx$$

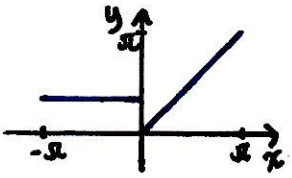
$$+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx.$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx = b_m\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx = L\,b_m.$$

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx.$$

Bu denklemlerle belirlenen a_0, a_n, b_n katsayılarıyla (*) denklemine $-L<x<L$ aralığında f fonksiyonunun <u>Fourier serisi açılımı</u> denir. a_0, a_n, b_n katsayılarına da f'nin <u>Fourier katsayıları</u> denir.

Örnek: $f(x)=\begin{cases} 1, & -\pi<x<0 \\ x, & 0<x<\pi \end{cases}$ fonksiyonunun serisi açılımını bulunuz.



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx = 1+\frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx = \frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nx\,dx = \frac{(-1)^n(1-\pi)-1}{n\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-\pi)-1}{n\pi}\sin nx.$$

Tanım: $-L<x<L$ aralığında tanımlı bir $f(x)$ fonksiyonunun <u>Fourier serisi</u>

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right]$$

dir. Burada

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

dir.

Fourier Serisinin Yakınsaklığı

Teorem: Fourier Serisinin Yakınsaklığı: $-L<x<L$ aralığı üzerinde f ve türevi f' parçalı sürekliyse f, sürekli olan bütün noktalarda Fourier serisine eşittir. f'de sıçramalı süreksizliğin olduğu bir c noktasında, Fourier serisi $\dfrac{f(c^+)+f(c^-)}{2}$ ortalamasına yakınsar. Burada, $f(c^+)$ ve $f(c^-)$ sırasıyla c noktasında f'nin sağ ve sol limitlerini göstermektedir.

Örnek: Bir önceki örnekteki $f(x)$ fonksiyonu, Teoremin şartlarını sağlar. $-\pi<x<\pi$ aralığındaki her $x\neq 0$ için Fourier serisi $f(x)$'e yakınsar. $x=0$'da fonksiyon sıçramalı süreksizliğe sahiptir ve Fourier serisi

$$\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$$

ortalama değerine yakınsar.

Peryodik Genişleme

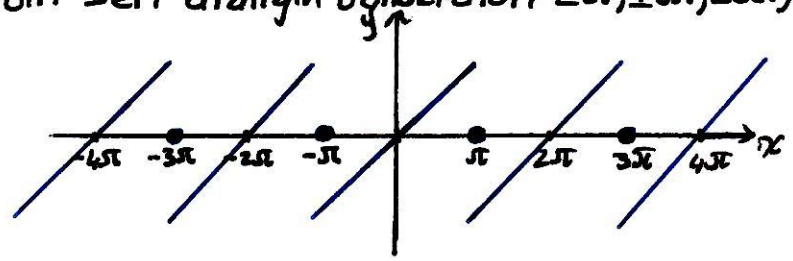
Trigonometrik terimler $\sin\frac{n\pi x}{L}$ ve $\cos\frac{n\pi x}{L}$, $2L$ peryodludur. Gerçekten

$$\sin\frac{n\pi(x+2L)}{L}=\sin\frac{n\pi x}{L}\cos 2n\pi+\cos\frac{n\pi x}{L}\sin 2n\pi=\sin\frac{n\pi x}{L} \quad \text{ve}$$

$$\cos\frac{n\pi(x+2L)}{L}=\cos\frac{n\pi x}{L}\cos 2n\pi-\sin\frac{n\pi x}{L}\sin 2n\pi=\cos\frac{n\pi x}{L}$$ dir. Dolayısıyla Fourier serisi $2L$ peryodlu bir peryodik fonksiyondur. Bu yüzden, Fourier serisi yalnız $-L<x<L$ aralığında f fonksiyonunu temsil etmez, bütün reel sayılar doğrusu üzerinde f'nin <u>peryodik genişlemesini</u> üretir. Teoreme göre aralıkların uç noktalarında seri ortalama değere yakınsar: $\dfrac{f(L^-)+f(L^+)}{2}$ $\pm 3L, \pm 5L, \pm 7L, \dots$

Örnek: $-\pi<x<x$ aralığında $f(x)=x$'in Fourier serisi $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$ dir. Seri, bütün x-ekseni üzerinde peryodik genişlemesine yakınsar. π'de

$$\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{(-\pi)+\pi}{2}=0$$ dır. Seri aralığın uçnokta ları $\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$ de 0'a yakınsar.



Örnek: $f(x)=x^2$, $-\pi<x<\pi$ fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz ve $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ile $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ serilerinin toplamını bulunuz.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx\begin{bmatrix}u=x^2 & dv=\cos nx\,dx\\ du=2x\,dx & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{bmatrix}=\frac{1}{\pi}\left(\cancelto{0}{\frac{x^2}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}}-\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx\right)$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx\begin{bmatrix}u=x & dv=\sin nx\,dx\\ du=dx & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{bmatrix}=-\frac{2}{n\pi}\left(\frac{-x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\cancelto{0}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx}\right)$$

$$=\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,dx\begin{bmatrix}u=x^2 & dv=\sin nx\,dx\\ du=2x\,dx & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{bmatrix}=\frac{1}{\pi}\left(\cancelto{0}{\frac{-x^2}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}}+\frac{2}{n}\cancelto{0}{\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\,dx}\right)$$

$$=0$$

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx$$

$$f(0)=0\Rightarrow\quad\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

$$f(\pi)=\pi^2=\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2}\Rightarrow\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}(-1)^n\Rightarrow 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},$$

Fourier Cosinüs ve Sinüs Serileri

Uzun, ince, yalıtılmış bir telde ısı iletimi modellemesinde, x-ekseninde $0<x<L$'yi, telin L uzunluğu olarak düşünelim. Telin uzunluğu boyunca $u(x,t)$ derecesi, x'in yeri ve t zamanının ikisine bağlı olarak değişir. Problem, tel boyunca başlangıç sıcaklığı $u(x,0)=f(x)$ olarak verilen $u(x,t)$'yi belirlemektir. Örneğin, telin bir ucu sıcak diğer ucu soğuk olabilir. Isı sıcak uçtan soğuk uca yayılacaktır. Biz, bir saat sonra ısının dağılımını bilmek istiyebiliriz. Bunun için bir yöntem, $0<x<L$ aralığında, yani simetrik olmayan bu aralıkta

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

ifadesini bulmaktır. f için Fourier serisinin açılımını nasıl hesaplayabiliriz. Bunu yapmak için, fonksiyonu simetrik $-L<x<L$ aralığına genişletmemiz gerekir. $-L<x<0$ üzerinde f'nin genişlemesini nasıl yapmalıyız. Bunu, 8.g'deki teoremin hipotezlerini sağlayacak şekilde yapıyoruz.

Tek ve Çift Fonksiyonların İntegralleri

g'nin tanım kümesindeki bütün x'ler için $g(-x)=g(x)$ ise $g(x)$ fonksiyonuna çift, $g(-x)=-g(x)$ ise tek fonksiyon olduğunu söylemiştik. Buna göre, $g(x)$ tek fonksiyon ise

$$\int_{-L}^{L} g(x)dx=0$$

çift fonksiyon ise

$$\int_{-L}^{L} g(x)dx=2\int_{0}^{L} g(x)dx$$

dir. Ayrıca:

1. iki çift fonksiyonun çarpımı çifttir.
2. Bir çift bir tek fonksiyonun çarpımı tektir.
3. iki tek fonksiyonun çarpımı çifttir.

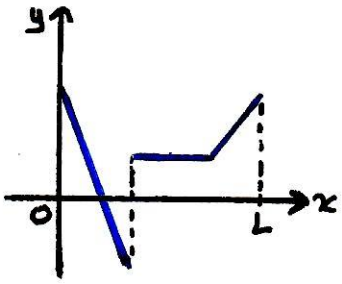
Çift Genişleme: Fourier kosinüs Serileri

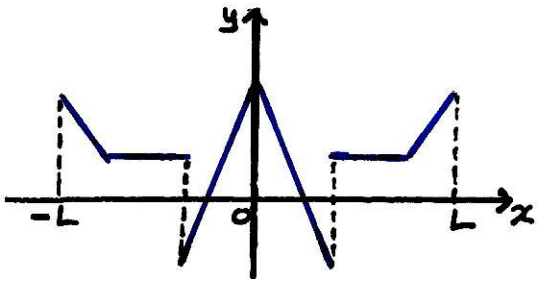
$y=f(x)$ fonksiyonunun özellikle $0<x<L$ aralığında tanımlandığını düşünelim. f'nin <u>çift genişlemesini</u>

$$f(-x)=f(x), \quad -L<x<L$$

ile tanımlıyoruz

Bir fonksiyonun çift genişlemesi aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.





Bu yüzden, bir f fonksiyonunun çift genişlemesini kullanarak Fourier katsayılarını elde edebiliriz:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}}_{\text{çift}}dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}}_{\text{tek}}dx = 0.$$

f'nin Fourier serisi $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$ dir.

b_n Fourier katsayılarının hepsi sıfır olduğundan, Fourier serisi açılımında sinüs terimleri yoktur. Buna f fonksiyonunun <u>Fourier kosinüs serisi</u> denir.

Fourier Kosinüs Serisi $-L<x<L$ aralığında bir çift fonksiyonun Fourier serisi

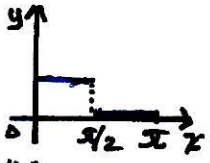
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

<u>kosinüs serisidir</u>. Burada,

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

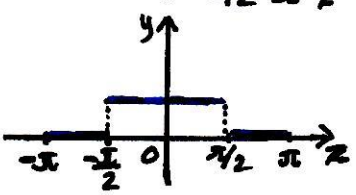
dir.

Örnek: $f(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$ fonksiyonunun Fourier kosinüs serisini bulunuz.



$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} dx = \frac{2x}{\pi}\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos nx\,dx = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}.$$



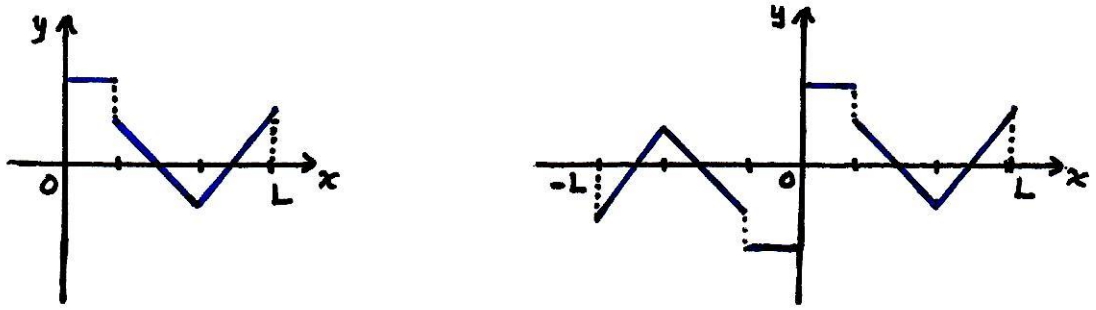
Fourier kosinüs genişlemesi $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos nx$ dir.

Tek Genişleme: Fourier Sinüs Serileri

Bir $y=f(x)$ fonksiyonu $0<x<L$ aralığında tanımlı olsun.

$$f(-x)=-f(x), \quad -L<x<L$$

ile f'nin <u>tek genişlemesini</u> tanımlarız. Bir fonksiyonun tek genişlemesi aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. (orjine göre simetrik)



f'nin tek genişlemesi için Fourier katsayıları:

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx=0, \qquad a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}}_{\text{tek}}\,dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}}_{\text{çift}}\,dx=\frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

f'nin Fourier serisi

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

dir.

a_0 ve a_n Fourier katsayılarının hepsi sıfır olduğundan, Fourier serisinin genişlemesinde kosinüslü terimler görünmez ve seriye f fonksiyonunun <u>Fourier sinüs serisi</u> denir. Bu seri, $0<x<L$ aralığı üzerinde orjinal f fonksiyonuna yakınsar, $-L<x<0$ aralığı üzerinde tek genişlemesine yakınsar.

Fourier Sinüs Serisi: $-L<x<L$ aralığı üzerinde bir tek fonksiyonun Fourier serisi

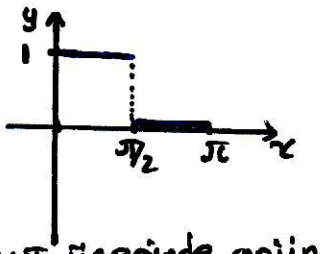
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

<u>sinüs serisidir</u>. Burada

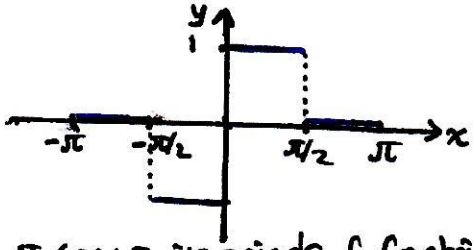
$$b_n=\frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

dir.

Örnek: $f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$ fonksiyonunun Fourier sinüs serisini bulunuz.



$0<x<\pi$ üzerinde orjinal parçalı sürekli f fonksiyonu.



$-\pi<x<\pi$ üzerinde f fonksiyonunun tek genişlemesi.

f(x) fonksiyonunun tek genişlemesini seçiyoruz. Fourier katsayıla-

rı

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin nx\,dx=-\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

dir. Fourier sinüs genişlemesi

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin nx$$

dir.

Aşağıdaki şekilde, n=1, 5 ve 20 için f(x)'in Fourier sinüs yak-

laşımlarının grafikleri gösterilmiştir.